Die Behandlung einführender Probleme der Differentialrechnung mit Hilfe programmierbarer ETR

Otto Wurnig, Graz

In den letzten zehn Jahren wurde der Unterricht der Differentialrechnung orientiert an den österreichischen Mathematiklehrbüchern an den Gymnasien immer abstrakter gestaltet. Gleichzeitig erhielt man in den Lehrveranstaltungen der Pädagogischen Akademien und Hochschulen den Eindruck, daß das Verständnis für die fundamentalen Ideen keinesfalls zugenommen hat, ja sogar durch das verringerte Aufgabenrechnen abgenommen hat.

In diesem Beitrag soll nun aufgezeigt werden, wie man mit Hilfe programmierbarer elektronischer Taschenrechner (abgekürzt proj. ETR) vor die abstrakte Phase, eine experimentelle, induktive Phase voranstellen kann.

Der ETR ist in der Oberstufe der österreichischen Gymnasien ein selbstverständliches Hilfsmittel im Mathematikunterricht geworden. Läßt man den Schülern beim Kauf des ETR freie Hand, so kaufen überraschend viele einen proj. ETR. So besitzen im Schuljahr 1979/80 in der 7.a Klasse des BRG Graz 12 von 27 Schülern ein derartiges Gerät. Es ist selbstverständlich, daß man in solchen Klassen diese Möglichkeit für eine anschaulichere und leichter verständlichere Unterrichtsgestaltung nützen sollte.

(1) Wie kann man den proj. ETR im normalen Mathematikunterricht einsetzen?

Aus meinem Unterricht heraus entwickelte sich in Zusammenarbeit mit den Schülern im Mehrphasenplan.

1. Phase: Analyse. Das mathematische Problem wird in der Unterrichtsstunde vorbereitet, mit dem einfachen ETR numerisch analysiert und am Ende eventuell in einfacher Flußdiagrammschreibweise dargestellt.
2. Phase: Codierung. Einige Schüler codieren zu Hause für ihre proj. ETR das Problem, testen ihr Programm und stellen einen brauchbaren Ausdruck her.
3. Phase: Vervielfältigung des Ausdrucks. In der Schule wird vor der Mathematikstunde der Computerausdruck für jeden Schüler vervielfältigt.
4. Phase: Arbeitsphase (Üben des plausiblen Schließens nach Polya). Der am Beginn der Mathematikstunde ausgeteilte Computerausdruck wird in Gruppen bearbeitet. Am Ende dieser Phase steht nur auf Grund des analysierten Datenmaterials aufgestellte Vermutung bezüglich der Lösung des Problems.
5. Phase: Algebraische Beweisführung (Über des demonstrativen Schließens nach Polya). Die erratene Lösung wird algebraisch bewiesen bzw. theoretisch begründet.

(2) Der exemplarische Einsatz der proj. ETR bei der Erarbeitung des Begriffs Zahlenfolge

(a) Die intuitive Erarbeitung des Begriffs Zahlenfolge kann einfach bei der Berechnung der Quadratwurzel einer Zahl a nach der Formel von Newton $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$ erfolgen. Ausgabe für $a = 2$ bzw. $a = 3$, wenn der 1. Näherungswert $x_1 = 1$ ist.

$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
$x_1 = 1$	$x_1 = 1$
$x_2 = 1,5$	$x_2 = 2$
$x_3 = 1,416666667$	$x_3 = 1,75$
$x_4 = 1,414215686$	$x_4 = 1,732142857$
$x_5 = 1,414213562$	$x_5 = 1,732050810$
	$x_6 = 1,732050808$

Der Bildungsprozeß wird hier abgebrochen, wenn $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-9}$ ist. Als anschauliches Bild des Prozesses bietet sich die Darstellung der Näherungswerte als Punkte auf der Zahlengeraden an. Die Schüler formulieren selbst nach erfolgter Untersuchung der Tabelle (4. Phase): "Die Zahlenfolge strebt gegen

$\sqrt{a}$, da der Unterschied zwischen x_n^2 und a immer kleiner wird".

(b) Der Zahlenfolge als Funktion. Die Definition in Laub, 6. Klasse, Seite 2 lautet: "Ist f nur Abbildung der Menge N_K auf einer Menge M oder eine Teilmenge von M, so nennt man $\langle f(1),f(2),\ldots,f(k)\rangle$, $f(k) \in M$, $k \in N_k$ eine endliche Folge".

Diese Definition wird von den Schülern kaum verstanden. Eine solche abstrakte Definition kann daher nur das Ergebnis eines Entwicklungsprozesses sein.

Da bereits das Tabellieren von Funktionen (Flußdiagramm Bild 1) den Schüler aus der 5. Klasse bekannt ist, ist es leicht Zahlenfolgen mit Bildungsgesetz mit dem proj. ETR zu berechnen. Man braucht nur für x $n \in N$ und für f(x) $a_n = f(n)$ zu setzen. Die Zahlenfolgen lassen sich wie alle Funktionen am besten in einem zweidimensionalen Bild veranschaulichen.

(c) Die Reihe als Folge von Teilsummen. Die Definition in Laub, 6. Klasse, Seite 61 lautet: "Unter einer endlichen Zahlenreihe versteht man die Folge der Teilsummen $\langle s_1,s_2,\ldots,s_n\rangle$, die der Folge $\langle a_1,a_2,\ldots,a_n\rangle$ zugeordnet sind".

Sollen die Schüler jedoch ein Programm zur Summation der ersten n natürlichen Zahlen erstellen, so wird der doppelte Summationsprozeß (Flußdiagramm Bild 2) nur von wenigen erkannt.

(3) Die Annäherung der Differentialquotienten durch eine Folge von Differenzenquotienten

Im Buch von Rosenberg ("Methodisch geordnete Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik und Geometrie für die 7. und 8. Klasse"), das von vielen Mathematiklehrern noch immer den neuen abstrakten Lehrbüchern zur 7. Klasse vorgezogen wird, ist auf Seite 43 der Differentialquotient

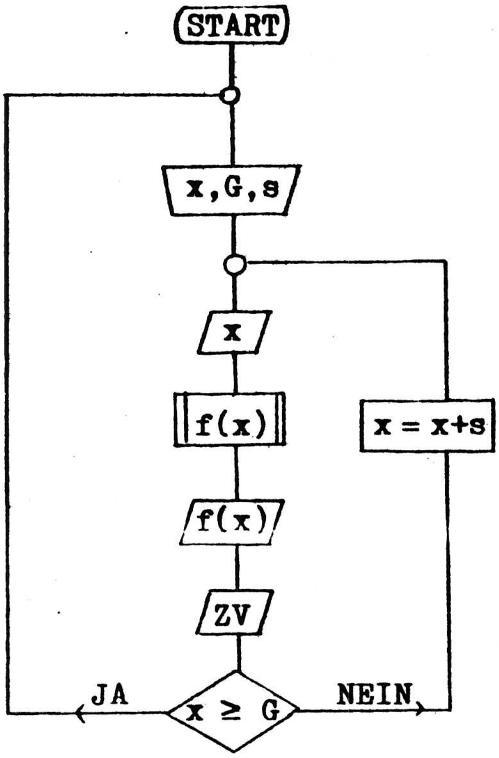


Bild 1: Tabellieren von Funktionen

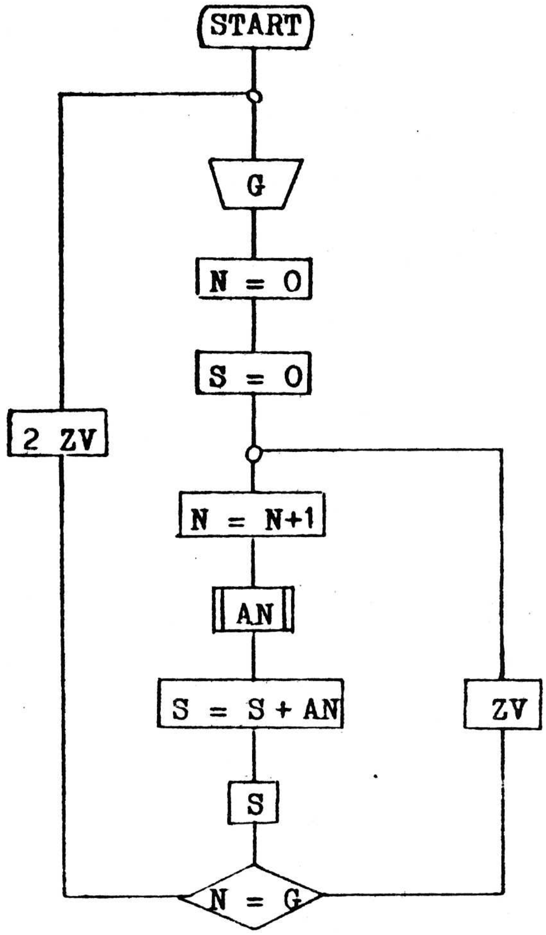


Bild 2: Die endliche Reihe als Folge von Teilsummen

als Grenzwert des Differenzenquotienten wie folgt definiert:

$$f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{y-y_o}{x-x_o} = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}, \text{ d.h. für } y = x^2 \text{ ist}$$

$$f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{x^2-x_o^2}{x-x_o} = \lim_{x \to x_o} (x+x_o) = 2x_o.$$

Bei dieser Darstellung kommt der Folgenbegriff und damit der Grenzwertprozeß zu kurz. Es wird im Unterricht außerdem fast nur mit der Formel, ohne viel zu überlegen, weitergerechnet.

Nimmt man jedoch für $x_n = x_o \pm \frac{1}{n^2}$, so formt sich der Ausdruck wie folgt um:

$$\lim_{x_n \to x_o} \frac{f(x_n)-f(x_o)}{x-x_o} = \lim_{n \to \infty} \frac{f(x_o \pm \frac{1}{n^2}) - f(x_o)}{\frac{1}{n^2}}$$

Der Term $d(x_o,) = \dfrac{f(x_o + \frac{1}{n^2}) - f(x_o)}{\frac{1}{n^2}}$ läßt sich mit einem modifizierten Tabellierungsprogramm schnell berechnen.

Beispiel: $y = x^{1/2}$

$x_o = 1$	n	d(1,n)	$x_o = 4$	n	d(4,n)	$x_o = 25$	n	d(25,n)
	2	0,41421		2	0,23607		2	0,09902
	4	0,47214		4	0,24621		4	0,09975
	8	0,49423		8	0,24903		8	0,09994
	16	0,49806		16	0,24976		16	0,09998
	32	0,49951		32	0,24994		32	0,09999
	64	0,49988		64	0,24998		64	0,09999
	128	0,49997		128	0,24999		128	0,10000

Das Ergebnis der ersten Datenanalyse wird in einer zweiten Tabelle zusammengefaßt:

Funktion	Stelle x_o	vermuteter Grenzwert	überlegte Umformungen
	1	$\frac{1}{2}$	$= \frac{1}{2.1} = \frac{1}{2.\sqrt{1}}$
$y = x^{\frac{1}{2}}$	4	$\frac{1}{4}$	$= \frac{1}{2.2} = \frac{1}{2.\sqrt{4}}$
	25	$\frac{1}{10}$	$= \frac{1}{2.5} = \frac{1}{2.\sqrt{25}}$
vermuteter allg.Zusammenhang	x_o	$\frac{1}{2\sqrt{x_o}}$	$= \frac{1}{2} \cdot x_o^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1}$

Somit kann vermutet werden, daß die Formel $y = x^n$, $y' = n.x^{n-1}$ nicht nur für $n \in N$, oder $\in Z$ sondern auch für $n \in Q$ gilt!

Besonders wichtig ist das Tabellieren der Differenzenquotienten der Funktion $y = \ln x$ bzw. $y = e^x$. Beide Ergebnisse $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ bzw. $(e^x)' = e^x$ sind rasch aus der Tabellierung abzusehen und überraschen die Schüler sehr!

(4) Anschauliche Behandlung der Kurvendiskussion

Zum Problemeinstieg wird von einer günstig gewählten ganzen rationalen Funktion f(x), f'(x), f"(x) zuerst tabelliert, dann gezeichnet (Bild 3) und schließlich analysiert. Aus Tabellen bzw. Zeichnung können die Eigenschaften von Extrem- und Wendepunkten klar erkannt und formuliert werden. Eine theoretische Begründung (5. Phase) schließt sich im Unterricht als letzte Phase an.

Beispiel: $y = x^3 - 12x^2 + 36x - 12$

x	f(x)	f'(x)	f"(x)
-1	-61	63	-30
-0,5	-33,13	48,75	-27
0	-12	36	-24
0,5	3,13	24,75	-21
1	13	15	-18
1,5	18,38	6,75	-15
2	20	0	-12
2,5	18,63	- 5,25	- 9
3	15	- 9	- 6
3,5	9,88	-11,25	- 3
4	4	-12	0
4,5	- 1,88	-11,25	3
5	- 7	- 9	6
5,5	-10,63	- 5,25	9
6	-12	0	12
6,5	-10,38	6,75	15
7	- 5	15	18
7,5	4,88	24,75	21

Aus Tabelle und Zeichnung (Bild 3) werden der Reihe nach untersucht:

(a) die Nullstellen von f(x):

$N_1 \in [0/0,5]$, $N_2 \in [4/4,5]$, $N_3 \in [7/7,5]$.

Die drei erhaltenen Intervalle können mit einer kleineren Schrittweite tabelliert werden. Man erhält dadurch einen brauchbaren Näherungswert für das Newton-Verfahren, welches am proj. ETR rasch durchgeführt werden kann.

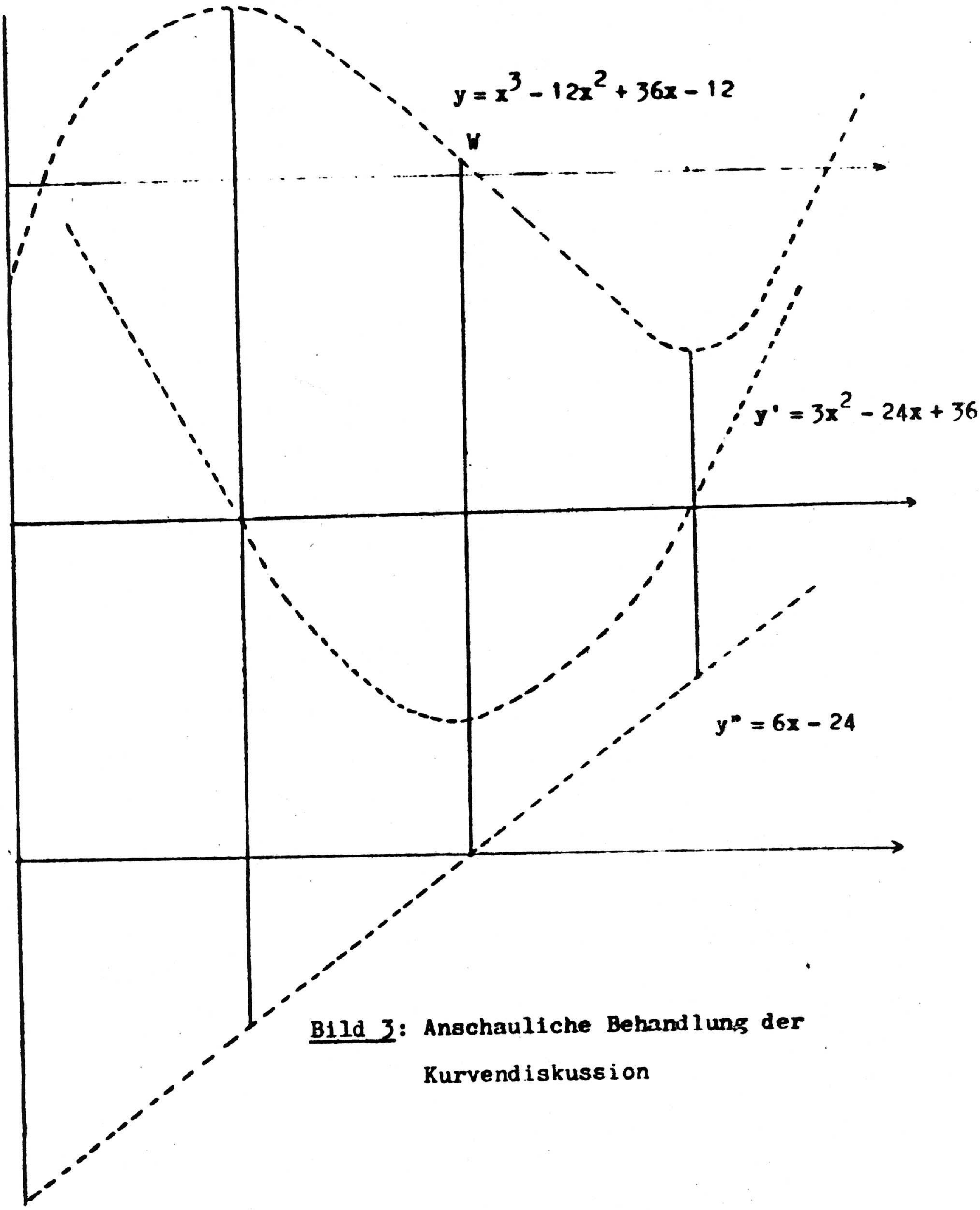


Bild 3: Anschauliche Behandlung der Kurvendiskussion

(b) **die Extremwerte von f(x):**

Maximum (2/ 20), $f'(2) = 0$, $f''(2) = -12 < 0$

Minimum (6/-12), $f'(6) = 0$, $f''(6) = +12 > 0$

---

vermutete Regel: $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0$ Maximum

$f''(x_0) > 0$ Minimum

(c) **der Wendepunkt von f(x):**

W(4/4) $f'(3{,}5) = -11{,}25$

$f'(4) = -12$ $f''(4) = 0$

$f'(4{,}5) = -11{,}25$

---

vermutete Regel: $f'(x_0)$ Extemwert, $f''(x_0) = 0$

(5) Die Behandlung der Extremwertaufgaben als Kurvendiskussion

Da Extremwertaufgaben sehr bald schematisch gerechnet werden und das Tabellieren und Zeichnen von Kurven zeitaufwendig ist, geht der Zusammenhang zwischen der Kurvendiskussion und der Lösung von Extremwertaufgaben oft verloren.

Ganz rätselhaft wird schließlich für viele die erlaubte Vereinfachung der Ansatzfunktion.

Im folgenden soll an einem einfachen Beispiel kurz gezeigt werden, wie man diesen Zusammenhang exemplarisch herausarbeiten kann.

Beispiel:

Einem Halbkreis (r) soll das größte Rechteck eingeschrieben werden!

$l = 2x$, $b = y$

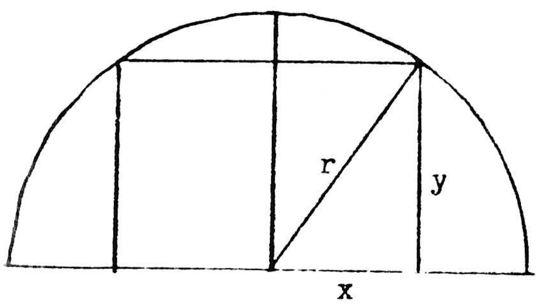
$0 < x < r$; $0 < y < r$

$A_R = 2xy$ ... Maximum

Nebenbedingung: $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

Ansatzfunktion: $f(x) = x \cdot \sqrt{r^2 - x^2}$

vereinfachte Ansatzfunktion: $g(x) = [f(x)]^2 = x^2(r^2 - x^2)$



1. Vorschlag: Man tabelliere mit $r = 10$ cm die Länge und die Breite bzw. den Flächeninhalt des Rechteckes im Intervall [0/20] mit der Schrittweite 1!

l	b	A
13	7,60	98,79
14	7,14	99,98
15	6,61	99,22

vermutetes Ergebnis:

$l \approx 14;\ b \approx 7{,}14;\ A \approx 100\ (= r^2)$

2. Vorschlag: Man tabelliere mit $r = 10$cm die Ansatzfunktion $f(x) = x \cdot \sqrt{r^2 - x^2}$ und zeichne sie!

3. Vorschlag: Man differenziere die Funktion $f(x)$ und setze den erhaltenen Term gleich Null! $\sqrt{r^2 - x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 0$

$x = y = \frac{r}{2}\sqrt{2};\ A = r^2;$ für $r = 10;\ l = 14{,}14;\ b = 7{,}07;\ A = 100$

4. Vorschlag: Man quadiere $f(x)$, differenziere die erhaltene Funktion $g(x)$ und setze den erhaltenen Term gleich Null! $2r^2x - 4x^3 = 0$

Der vierte Vorschlag kommt natürlich vom Lehrer. Die so vereinfachte Rechnung löst bei den Schülern solche Überraschung aus, daß sie den fachlichen Zusammenhang zwischen dem zweiten und vierten Vorschlag nicht sehen. Ein Tabellierungsvergleich zwischen $f(x)$ und $g(x)$, eventuell unterstützt durch eine Zeichnung, läßt den Zusammenhang sofort erkennen.

x	f(x)	g(x)
6,5	49,40	2339,9
7	49,99	2499
7,5	49,61	2460,9

Mag. Otto Wurnig
BRG Graz
Keplerstraße 1
8020 G r a z